

Esempio di riduzione a scalini

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Penso sia come matrice completa del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -4 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

POSSIBILE
↓

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvo il sistema associato a questa matrice,
che è equivalente al sistema iniziale

Dalla terza riga ricavo

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = -4$$

$$x_1 = 1$$

C'è un'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimostriamo che se in un sistema
sostituiamo la riga i con
la riga $i + \lambda$ riga j
allora le soluzioni non cambiano

$$(*) \begin{cases} a_{i1}x_1 + & + a_{im}x_m = b_i \\ a_{j1}x_1 + & + a_{jm}x_m = b_j \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + & + (a_{im} + \lambda a_{jm})x_m = b_i + \\ (*) \begin{cases} a_{j1}x_1 + & + a_{jm}x_m = b_j \end{cases} \end{cases} + \lambda b_j$$

è una soluzione di $(*)$

Mostriamo che

$$(a_{i1} + \lambda a_{j1})d_1 + (a_{im} + \lambda a_{jm})d_m = b_i + \lambda b_j$$

Infatti il membro a sinistra è uguale a

$$\frac{(a_{i1}d_1 + \dots + a_{in}d_n)}{+ \lambda \frac{(a_{j1}d_1 + \dots + a_{jn}d_n)}{}} = b_i + \lambda b_j$$

Esercizio: Verificate ^{in maniera analoga} che se

$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ è soluzione di $\otimes \otimes$ allora

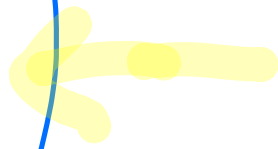
è anche soluzione di $\otimes$.

Esercizio 1.6.3

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2 \end{cases}$$

Per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette soluzioni?

Matrice completa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 & -2 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ \textcircled{1} & 2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & \textcircled{k-1} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -(k-1)k & -(k-1) \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & K & 1 \\ 0 & 0 & -(K-1)K & -K \end{pmatrix}$$

	Ranko della mat <u>incom</u>	Ranko matrice <u>completa</u>
$K=1$	2	3
$K=0$	2	2
$K \neq 0$	3	3

Risposta Il sistema ha soluzione se
e solo se $K \neq 1$.

SPAZIO VETTORIALE (Cap. 2)

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

↑
VETTORI

Operazioni:

SOMMA

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

In generale

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

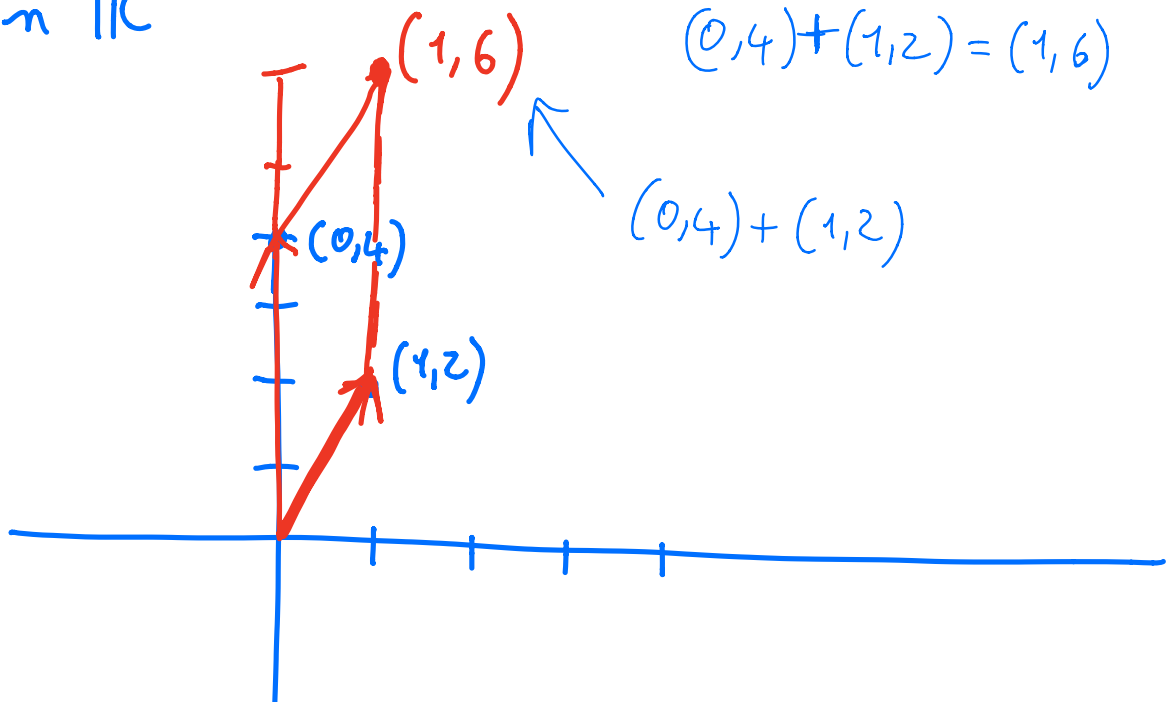
MOLTIPLIC. PER SCALARE

$$5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

In generale

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^2$



Lo stesso su $\mathbb{R}^n$

PROPRIETÀ

① COMMUTATIVA di +

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

② ASSOCIATIVA +

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

③ esistenza dell'elemento neutro
rispetto alla +

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

④ esistenza dell'opposto rispetto alla +

dato $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_m \end{pmatrix}$ esiste $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_m \end{pmatrix} t_c$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

⑤ e ⑥ DISTRIBUTIVITÀ

$$\lambda \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix} \right) =$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}$$

e anche

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$$

(7)

$$(\lambda \mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} \right)$$

$$(8) \quad 1. \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$$

Def Spazio Vettoriale:

è un insieme V su cui sono definite
una somma $(+)$ e un "prodotto per scalare",
dove scalare = numero reale che
soddisfanno le 8 proprietà elencate sopra.
Gli elementi $v \in V$ si chiamano vettori.

Per esempio

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi
nella variabile x .

$$p(x) = x^3 + 2x + 1$$

$$q(x) = x^2 + \sqrt{2}$$

$$p(x) + q(x) = x^3 + x^2 + 2x + (\sqrt{2} + 1)$$

$$5 \quad p(x) = 5x^3 + 10x + 5$$

In V sp. vettoriale c'è l'elemento neutro rispetto alla $+$.

Per esempio
in $\mathbb{R}^3$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lo chiamiamo

In $\mathbb{R}$ c'è 0



Domanda

Se $v \in V$

$0 v \stackrel{?}{=} \bigcirc$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\mathbb{R} \quad V$

Sì

infatti

$$0v = (0+0)v = 0v + 0v$$

↑
per proprietà
(6) (7)

Adesso $0v$ ha un opposto w per la (4)

$$0v = 0v + 0v$$

SOMMO ad entrambi i membri w

$$w + 0v = 0v + (0v + w)$$

$$0 = 0v + 0$$

per la (3)

$$0 = 0v$$

Domanda:

Dato $v \in V$ esiste un unico
opposto?

Domanda Ma l'elemento neutro in V

è unico? Potrebbe esistere O
e O'

↑
NO

$$O' = O + O' = O$$

Rispondiamo anche alla domanda sopra:
siano W e W' due opposti di v . Allora:

$$\begin{cases} v + W = O \\ v + W' = O \end{cases}$$

in particolare.

$$v + W = v + W'$$

sottrai ad entrambi un opposto di v
(qualunque) e ottengo

$$W = W'$$

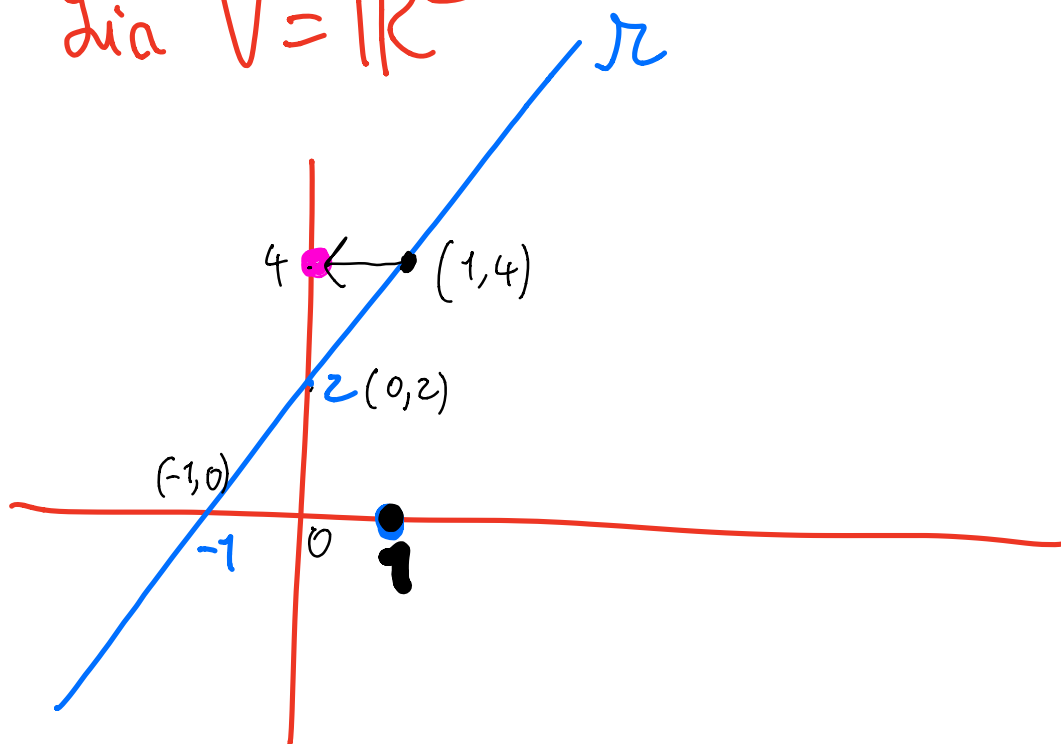
...

Vedere
Esercizio 2.3.5

SOTTOSPAZIO VETTORIALE:

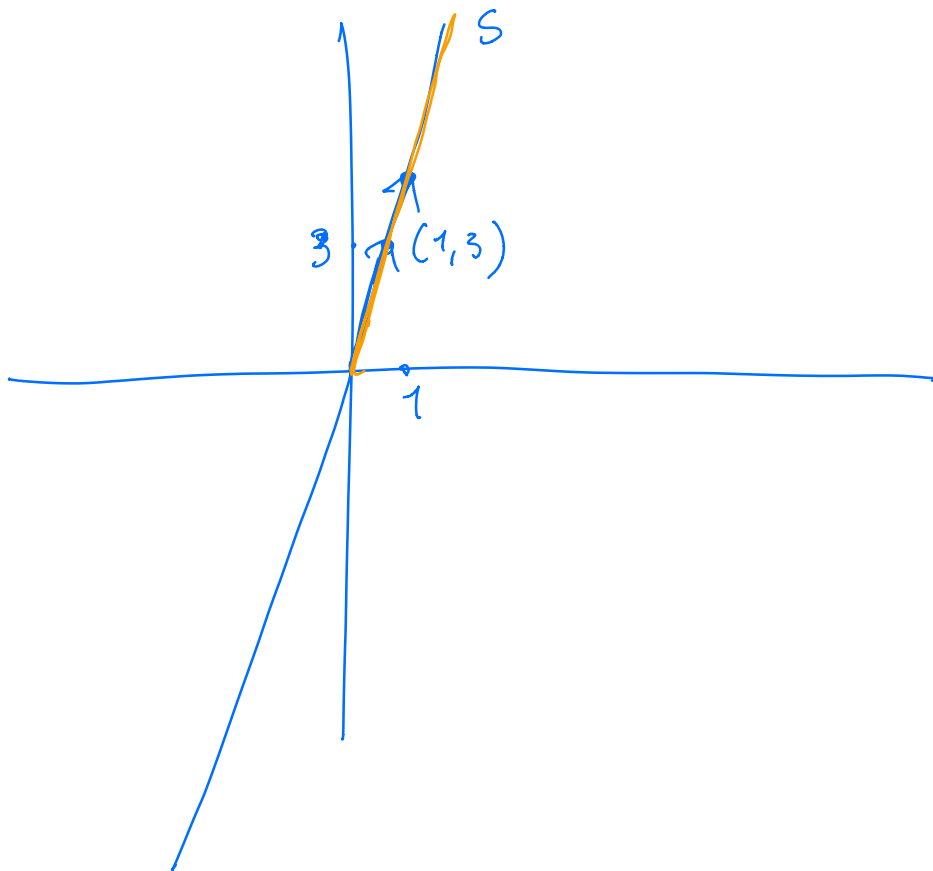
Cosa è?

Sia $V = \mathbb{R}^2$



$$\cdot \quad (1,4) + (-1,0) = \underline{\underline{(0,4)}} \notin r$$

La retta r non è un sottospazio vettoriale



se la retta S passa per l'origine
 invece è un sottospazio vettoriale

$$v \in S \quad \text{allora} \quad v = 5(1,3)$$

$$w \in S \quad \text{allora} \quad w = -\sqrt{2}(1,3)$$

$$v + w = (5 - \sqrt{2})(1,3)$$

Def Dato uno sp. vettoriale V .

Diremo che un sottosistema $W \subseteq V$
è un sottospazio vettoriale se

① $0 \in W$

② $\forall w_1, w_2 \in W$ vale $w_1 + w_2 \in W$

③ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall w \in W$ vale $\lambda w \in W$

oss Dato V , ci sono sempre due
sottospazi: $\{0\}$ e V stesso.

Esempio Sia $V = \mathbb{R}[x]$

$$W = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ t.c. } p(2) = 0 \}$$

Domanda: W è un sottospazio?

$$W' = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ t.c. } p(2) = 1 \}$$

Domanda: W è un sottospazio?